Algebra de funciones

Si f y g funciones se define:

- Función suma: $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$
- Función diferencia: $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$
- Función producto: $f(x) * g(x) = (f * g)(x)$
- Función cociente: $f(x) \div g(x) = (f \div g)(x)$
- Función compuesta: $f(x) \circ g(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Ejercicio: Dados $f(x)$ y $g(x)$ encuentre: $(f + g)(x)$, $(g - f)(x)$, $(g * g)(x)$, $(f \div g)(x)$, $(f \circ g)(x)$

1. $f(x) = 2x$ y $g(x) = 3x + 1$
   - $f(x) + g(x) = (f + g)(x) = 2x + 3x + 1 = 5x + 1$
   - $f(x) - g(x) = (f - g)(x) = 2x - (3x + 1) = 2x - 3x - 1 = -x - 1$
   - $f(x) * g(x) = (f * g)(x) = (2x)*(3x + 1) = 6x^2 + 2x$
   - $f(x) \div f(x) = (f \div g)(x) = \frac{2x}{3x+1}$, *si la expresión no es factorizable y/o simplificable se deja indicada*

   - $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x + 1) = 2(3x+1) = 6x + 2$

   Nótese que donde esta x en f(x) se remplaza por 3x + 1

2. $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$
   - $f(x) + g(x) = (f + g)(x) = x^2 + x - 1$
   - $f(x) - g(x) = (f - g)(x) = x^2 - (x - 1) = x^2 - x + 1$
   - $f(x) * g(x) = (f * g)(x) = (x^2) *(x - 1) = x^3 - x^2$
   - $f(x) \div f(x) = (f \div g)(x) = \frac{x^2}{x-1}$,
   - $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x - 1) = (x - 1)^2 = x^2 + 2x - 1$

   Nótese que donde esta x en f(x) se remplaza por x - 1
3. $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x - 2$
4. $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x + 4$
5. $f(x) = x^3 - 5$ y $g(x)=2x^3 - 1$
6. $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = \sqrt{x} - 2$
7. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

Problemas de Aplicación

1. Suponga que el ingreso R (en pesos) de una compañía por la venta de x unidades de su producto se obtiene mediante $R(x) = 215x$ y el costo total C (en pesos) de producir esas x unidades se obtiene por $C(x) = 65x + 15000$

a. Si la ganancia G es el ingreso menos el costo, encuentre la función ganancia de la producción y la venta de x unidades.

Por definición G(x) = R(x) – C(x) remplazando

$$G(x) = 215x - (65x + 15\,000) = 215x - 65x - 15\,000$$

La función ganancia sería $\boxed{G(x) = 150x - 15000}$

b. Encuentre la ganancia si se producen y venden 1000, 100 y 10 unidades. ¿Qué encuentra?

Si se venden 1000 unidades G(1000) = 150(1 000) – 15 000 = 135 000

Si se venden 100 unidades G(100) = 150(100) – 15 000 = 0

Si se venden 10 unidades G(10) = 150(10) – 15 000 = - 13 500

Producir y vender: 1000 unidades deja una ganancia de $135 000; 100 unidades no deja utilidad pero tampoco pérdida; 10 unidades deja una pérdida de $13 500

2. El gasto del consumidor (Gc) por artículo es el producto de su precio en el mercado p (en dólares) y el número de unidades demandadas. Suponga que para cierto artículo, las unidades demandadas están dadas por la función $U(x) = 10\,000 - 10p$

a. Encontrar una expresión que determine el gasto del consumidor
Por dato

$$Gc = p * U(x) = p * (10\,000 - 10p)$$

La expresión del gasto del consumidor sería $\boxed{Gc = 10\,000p - 10p^2}$

b. Determinar el gasto del consumidor por artículo cuando el precio de mercado es 20 y 30 dólares.

Para p= 20; $Gc = 10\,000(20) - 10(20)^2 = 196\,000$
Para p = 30; $Gc = 10\,000(30) - 10(30)^2 = 291\,000$

A un precio de 20 dólares el gasto de consumidor es de 196 000 dólares y a 30 dólares el gasto es de 291 000 dólares, por lo tanto a menor precio menor es el gasto del consumidor

3. Los costos totales por la producción de cierto artículo en el instante t son $f(t)$ dólares. El número de productos fabricados en el instante t es $g(t)$ ¿qué representa $f(t)/g(t)$?

4. El número de acciones que tiene una persona está dado por *f(t)*. El precio de la acción en el instante t es *g(t)* miles de pesos ¿qué representa la expresión *f(t)*g(t)*
5. Un empresario es posee y opera dos restaurantes. El ingreso del primer restaurante en el instante t es *f(t)* miles de pesos y el ingreso del segundo restaurante en el instante t es *g(t)* miles de pesos ¿qué representa la función *f(t) + g(t)*
6. Los ingresos de una empresa están dados por *f(x)* dólares, donde x son los gastos de publicidad por parte de la empresa en dólares. La cantidad invertida en publicidad por la empresa en el instante t está dada por *g(t)* dólares ¿Qué representa la función $f \circ g$
7. El costo promedio por unidad de una compañía cuando se producen x unidades se define como:

$$Costo\ promedio = \frac{Costo\ total}{x}$$

Suponga que el costo total de una compañía se obtiene

$$Costo\ promedio = 4000 + 55x + 0{,}1x^2$$

a. Encuentre una expresión que determine los costos promedios
b. Determine los costos promedios para una producción de 10 y 100 unidades. ¿Qué encuentra

8. Suponga que la ganancia de la producción y la venta de x unidades producidas en un día de un producto se determina por medio de $P(x) = 180x - 0.01x^2 - 200$. Además el número de unidades producidas en el día t del mes es $x = 1000 + 10t$. Encuentre la ganancia obtenida el día 15 del mes.

   a. La función compuesta $(P\ o\ q)(t)$ que expresa la ganancia como un función del día del mes es
   b. El número de unidades producidas y la ganancia del día 15 del mes es

9. El ingreso mensual I obtenido por vender zapatos modelo de lujo en una función del precio ésta dado por $I = 300p - 2p^2$ y la función demanda es p= 150 – q/2.
   a. Escriba una expresión del ingreso en función de las unidades demandadas.
   b. Determine el ingreso si se demandan 100 y 200 unidades
   c. Compare los resultados que encuentra

10. En cierta fábrica, el costo total de fabricar q unidades durante la jornada de producción diaria es $C(q) = 0.2q^2 + q + 900$. Con base en la experiencia se ha determinado que aproximadamente $q(t) = t^2 + 100t$ unidades se producen durante las primeras t horas de una jornada de producción.

a. Escriba una expresión del costo total de fabricación respecto al del tiempo.
b. Calcular el costo total de fabricación 1, 5 y 7 horas después de iniciada la producción. ¿Qué encuentra?

11. Cuando las licuadoras eléctricas se venden a p dólares cada una, los consumidores locales comprarán $D(p) = \frac{8000}{p}$ licuadoras al mes. Se estima que dentro de t meses el precio de las licuadoras será $p(t) = 0.04t^{3/2} + 15$ dólares.
   a. Escriba una expresión de la demanda mensual de licuadoras con respecto al tiempo.
   b. Calcular la demanda mensual durante 6, 12 y 18 meses. ¿Aumenta o disminuye la demanda?

12. Un importador de café estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $d(p) = \frac{4\,374}{p^2}$ libras de café a la semana cuando el precio se p dólares por libra. Se estima que dentro de t semanas, el precio del café será:

$$p(t) = 0.02t^2 + 0.1t + 6 \text{ , dólares por libra.}$$

   a. Escriba una expresión de la demanda semanal de café con respecto al tiempo.
   b. Calcular la demanda de café durante 1, 2 y 4 semanas ¿Aumentará o disminuirá la demanda?

13. Cuando un determinado artículo se venda a p dólares por unidad, los consumidores comprarán $D(p) = \frac{40000}{p}$ unidades al mes. Se estima que dentro de t meses el precio del artículo será $p(t) = 0.04t^{3/2} + 6.8$ dólares por unidad.
   a. Escriba una expresión de la demanda mensual del artículo con respecto al tiempo.
   b. Calcular la demanda del artículo durante 1, 3 y 6 meses ¿Aumentará o disminuirá la demanda?