LIMITE

¿Qué se entiende por límite? De ordinario hablamos del precio límite, de la velocidad límite, del límite de nuestra propia resistencia, los límites de la tecnología moderna o de estirar un muelle hasta el límite. Todas esas frases sugieren que el límite es una especie de cota que a veces puede no ser alcanzable y otras no sólo es alcanzable sino superable. A través del límite se pueden visualizar los cambios en el rendimiento por pequeños números de unidades, podemos obtener acerca de la tasa de cambio instantánea, se convierte en el puente matemático de las tasas de cambio promedio a las tasas instantáneas.

Se ha utilizado la notación f(c) para indicar el valor de una función f(x) en x=c. Si se tiene que analizar un valor al que se aproxime f(x) conforme x se aproxime a c se usa la idea de de limite

$$\text{Si } f(x)= \frac{x^2-x-6}{x+2} = \frac{(x-3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = x+3$$

x = -2 no está en el dominio de f(x), es decir f(-2) no existe, si tomamos valores próximos a -2

x	-3	-2.5	-2.2	-2.1	-2	-1.9	-1.8	-1.5	-1
f(x)	-6	-5.5	-5.2	-5.1		-4.9	-4.8	-4.5	-4

Suponga que f(x) es una función definida en un intervalo abierto que contiene a *c* excepto quizás a *c*, entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L}$$

Se lee "el límite de f(x) cuando x tiende a c es igual a L". El limite L existe si podemos hacer que valores de f(x) estén tan cerca de L como lo deseemos, eligiendo valores de x suficientemente cercanos a c. Si los valores de f(x) no se aproximan a solo valor finito L cuando x tiende a c decimos que no existe el limite

Límites Laterales

Limite por la derecha: $\boxed{\lim_{x \to c^+} f(x) = L}$

Significa que los valores de f(x) se aproximan al valor L cuando $x \to c$*, aunque* $x > c$.

Limite por la izquierda $\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) = M}$

Significa que los valores de f(x) se aproximan al valor M cuando $x \to c$*, aunque* $x < c$.

Consideraciones Especiales

El límite de una función cuando x tiende a c es independiente del valor de la función en c, cuando existe *Lim f(x) = L cuando* $x \to c$, el valor de la función en c puede ser: Igual al límite, Indefinido o definido pero diferente al límite.

Se dice que el límite existe solo si L es un valor finito (número real)

Propiedades de los Límites

Si k ε R, $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} f(x) = M$

1. $\lim_{x\to c} k = k$

2. $\lim_{x\to c} x = c$

3. $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$

4. $\lim_{x\to c}[f(x) \times g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \times \lim_{x\to c} g(x)$

5. $\lim_{x\to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$

6. $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to c} f(x)}$

Ejercicios-1

Utilice las propiedades de límite y métodos algebraicos para encontrar los límites existentes

$\lim_{x\to -35}(34 + x)$	$\lim_{x\to -1}(4x^3 - 2x^2 + 2)$	$\lim_{x\to 3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

Limites Indeterminados

Si Lim f(x) = Lim g(x) =0 cuando x tiende a c, entonces la expresión racional que tiene la forma $\frac{0}{0}$ en x=c. Podemos factorizar x − c en f(x) y g(x), simplificar la fracción y después encontrar el límite de la expresión resultante.

Si Lim f(x) ≠ 0 y Lim g(x) =0 cuando x tiende a c, entonces $\frac{\lim_{x-c} f(x)}{\lim_{x-c} g(x)}$ no existe. En este caso, los valores de f(x) / g(x) son ilimitados cerca de x=c.

Ejercicio *Calcule cada limite si existe*

$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$	$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$	$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$

Continuidad en un punto

Función cuyo valor no salta súbitamente al aumentar o disminuir gradualmente la variable. Geométricamente hablando, una función continua es una que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Más exactamente, una función f(x) es continua si es continua en cada punto de su dominio, y es continua en un punto específico x = b si el límite de f(x), conforme x se aproxima a b, es f(b).

La función f es continua en x = c si se satisfacen todas las condiciones siguientes

1. f(c): exista
2. Lim f(x) cuando x tienda a c exista
3. Lim f(x) = f(c), cuando x tienda a c exista

Si no satisface una de las tres condiciones decimos que la función es discontinua en c

- Toda función polinómica es continua para todos los números reales.
- Toda función racional es continua en todos los valores de x excepto en aquello cuyo denominador es cero.

Ejercicio-1 Encuentre los valores de x donde las siguientes funciones son discontinuas

$f(x) = x^3 - 3x + 1$	$g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{(x-1)(x+2)}$	$h(x) = \sqrt{4-x}$
$i(x) = \dfrac{1}{x-2}$	$j(x) = \sqrt{x-1}$	$k(x) = \dfrac{2}{1-x}$

Ejercicio-2 Determine si cada función es continua o discontinua en el de x dada

$f(X) = x^2 - 5x, x = 0$	$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}, x = -2$	$f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}, x = -3$
$f(x) = \begin{cases} 2, x \leq 0 \\ x + 2, > 0 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \leq 2 \\ 4x - 7, & x > 2 \end{cases}$	

Límite de las Funciones Definidas por Partes

El límite de una función por partes o por trozos f(x) existe, si el límite de f(x) cuando x tiende a c por la izquierda es igual al límite f(x) cuando x tiende a c por la derecha. Es decir:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

Determine si los límites de cada función existen

a. $f(x) = \begin{cases} (x+2)^3 + 1 & \text{Si } x \leq -1 \\ 1 - x & \text{Si } x > -1 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{Si } x < 2 \\ x - 2 & \text{Si } x \geq 2 \end{cases}$

Ejercicios

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{1-3x}{9x^2+1}$	$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$	$\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2-8x+7}{x^2-6x-7}$	$\lim\limits_{y \to -3} \dfrac{y^2-9}{2y^2+7y+3}$
$\lim\limits_{s \to 1} \dfrac{s^3-1}{s-1}$	$\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$	$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t}$	
$\lim\limits_{x \to 3} f(x) donde\ f(x) = \left\{\dfrac{10-2x, x<3}{x^2-x, x \geq 3}\right\}$		$\lim\limits_{x \to -1} f(x) donde\ f(x) = \left\{\dfrac{x^2 + \frac{4}{x}, x \leq -1}{3x^3 - x - 1, x > -1}\right\}$	
$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+5x+6}{x+1}$	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h}$	

Limites Infinitos

Al evaluar la función f(x) = 1 / x, para valores de x muy grandes, f(x) nunca se vuelve negativo, aunque ningún valor de x hace que 1 / x sea igual a cero, es fácil ver que 1 / x se aproxima a cero a medida que x se hace más grande, lo anterior se denota

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Propiedades *Si c es cualquier constante entonces*

1. $\lim_{x\to\infty} c = c$

2.$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0\,,p>0$

3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0\,,n>0$

Ejercicio-3 Evaluar cada límite

$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+1}$	$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+1}$	$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^3+4}$
$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+5}{x^2+4x}$	$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x}{6x+1}$	$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-8}{4x^2+5x}$