INVERSA DE UNA MATRIZ

Dos matrices A y B son inversas si A.B = I y B.A = I, se llaman inversas la una de la otra, se denota $A = B^{-1}$ o $B = A^{-1}$

Inversa de una Matriz Cuadrada de Orden Dos

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \; entonces \; A^{-1} = \frac{1}{a.d-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Donde a.d – b.c ≠ 0, si a.d – b.c = 0, entonces A^{-1} no existe

Ejercicios. Calcule la traspuesta de cada matriz

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c. $C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ d. $D = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Inversa de una Matriz Cuadrada de Orden Superior a Dos

Para encontrar la inversa de una matriz cuadrada de orden superior a dos se sigue el siguiente procedimiento:

1. Forme una matriz ampliada [A|I], donde A es la matriz de n x n e I es la matriz identidad de n x n.
2. Utilice el método de Gauss-Jordan para obtener una matriz ampliada [I|B], es decir hasta que la matriz de la izquierda se transforme en una matriz identidad.
3. La matriz B de la derecha es la matriz inversa de A. Para verificar el producto de A.B debe ser igual a I.

Ejercicio. Obtener la inversa de la matriz

$$A=\begin{bmatrix}2&5&4\\1&4&3\\1&-3&-2\end{bmatrix}$$

Inicialmente se forma la matriz ampliada [A |I] donde I es la matriz identidad es decir $\left[\begin{matrix}2&5&4\\1&4&3\\1&-3&-2\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right]$

Luego se aplica el método de reducción de Gauss-Jordan para obtener la matriz ampliada [I | B]
La primera condición es tener 1 en la posición [1 , 1], como no se tiene la condición intercambiamos la filas 1 y 2, quedando

$$\left[\begin{matrix}1&4&3\\2&5&4\\1&-3&-2\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{matrix}\right]$$

Tener 0 en el resto de posiciones de la columna 1

$$\left[\begin{matrix}1&4&3\\2&5&4\\1&-3&-2\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{matrix}\right]\xrightarrow[F1*-1+F3]{F1*-2+F2}\left[\begin{matrix}1&4&3\\0&-3&-2\\0&-7&-5\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}0&1&0\\1&-2&0\\0&-1&1\end{matrix}\right]$$

Tener 1 en la posición [2,2]

$$\xrightarrow{F2/-3}\left[\begin{matrix}1&4&3\\0&1&2/3\\0&-7&-5\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}0&1&0\\-1/3&2/3&0\\0&-1&1\end{matrix}\right]$$

Tener 0 en el resto de posiciones de la columna 2

$$\xrightarrow[F2*7+F3]{F2*-4+F1}\left[\begin{matrix}1&0&1/3\\0&1&2/3\\0&0&-1/3\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}4/3&-5/3&0\\-1/3&2/3&0\\-7/3&11/3&1\end{matrix}\right]$$

Tener 1 en la posición [3,3]

$$\xrightarrow{F3*-3}\left[\begin{matrix}1&0&1/3\\0&1&2/3\\&0&1\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}4/3&-5/3&0\\-1/3&2/3&0\\7&-11&-3\end{matrix}\right]$$

Tener 0 en el resto de posiciones de la columna 3

$$\xrightarrow[F3*-2/3+F2]{F3*-1/3+F1}\left[\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}-1&2&1\\-5&8&2\\7&-11&-3\end{matrix}\right]$$

Para finalizar se verifica que A.B=I es decir $\begin{bmatrix}2&5&4\\1&4&3\\1&-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&1\\-5&8&2\\7&-11&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Ejercicio Halle la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Escribimos la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} f1*1+f2 \\ f1*-1+f3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f2/2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} f2*-3*f1 \\ \\ f2*-2+f3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 & -3/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f3/-11\begin{bmatrix} 1 & 0 & -11/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 & -3/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2/11 & 1/11 & -1/11 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f3*\frac{11}{2}+f1 \\ f3*-\frac{7}{2}+f2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ -3/22 & 2/11 & 7/22 \\ 2/11 & 1/11 & -1/11 \end{bmatrix}$$

Verificación

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ -3/22 & 2/11 & 7/22 \\ 2/11 & 1/11 & -1/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio. Calcule la inversa de cada matriz:

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		