Multiplicación de Matrices:

Multiplicación de una matriz por un Escalar

Para multiplicar una matriz por un escalar, se multiplica el escalar por cada elemento de la matriz

Ejemplo:

1. $5 \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5X3 & 5X2 \\ 5X4 & 5X1 \\ 5X6 & 5X9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 20 & 5 \\ 30 & 45 \end{bmatrix}$
2. $0.5 \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 & 0 \\ 3 & -0.5 & 2 \end{bmatrix}$

3. Encontrar w, x, y y z si
   a. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2y & -3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z & 10 \\ 4 & -w \end{bmatrix}$

   b. $3\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & y & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 & t & 0 \\ z & 1 & -1 \\ u & 2 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -v \\ 4 & 2u & w \\ -1 & 7 & 12 \end{bmatrix}$

Problemas de Aplicación

4. Una cadena de tiendas de electrónica tiene dos distribuidores. En mayo las ventas de los televisores, DVD y equipos de sonidos estuvo dada por

Distribuidor	TV	DVD	E Sonido
A	22	34	16
B	14	40	20

   a. Si la dirección establece ventas objetivo para junio de un 25% de aumento sobre las ventas de mayo, halle el escalar y las ventas proyectadas para junio.
   b. Si la dirección establece ventas objetivo para julio de un 15% de disminución sobre las ventas de junio, halle el escalar y las ventas proyectadas para julio.

5. Una cuenta de gastos de un asociado de ventas para la primera semana de cierto mes tiene los gastos diarios (en dólares) que se muestran en la matriz A

$$A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} Comidas & Hospedaje & Viajes & Otros \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 22 & 40 & 100 & 5 \\ 20 & 40 & 20 & 0 \\ 28 & 70 & 45 & 0 \\ 15 & 70 & 20 & 10 \\ 20 & 0 & 100 & 5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} Lunes \\ Martes \\ Miercoles \\ Jueves \\ Viernes \end{matrix} \end{array}$$

a. El asociado encuentra que el asociado de la segunda semana son 5% mayores (en cada categoría) que en la primera semana. Encuentre la matriz de gastos de la segunda semana.
b. Encuentre la matriz de gastos para la tercera semana si los gastos para esa semana son 4% menores (en cada categoría) de lo que fue en la segunda semana.

Multiplicación entre Matrices

En el caso de la multiplicación de matrices, para que dicha operación pueda realizase, se requiere que el número de columnas de la primera matriz sea igual al de filas de la segunda matriz.

Gráficamente

Si A y B son matrices el producto matricial A x B es posible si:

$f_A \times c_B$	x	$f_B \times c_B$	=	$f_A \times c_B$

=

Si dicha condición se cumple, entonces se puede concebir que cada elemento de la multiplicación sea resultado de aplicar de la siguiente fórmula:

$$C[i, j] = \sum_{k=1}^{n} A[i,k] * B[k,j]$$

donde A y B son las matrices a multiplicar, C es la matriz donde se guarda el resultado y C[i,j] es un elemento de la matriz C. Nótese el uso del elemento k. El elemento k es un entero que sirve como contador de las columnas en la matriz A y como contador de filas en la matriz C. Para ilustrar un poco es el proceso, se tienen las siguientes matrices:

$$\overset{\textbf{A}}{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{7} & \boxed{8} \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix}} \quad \textbf{X} \quad \overset{\textbf{B}}{\begin{matrix} 1 & \boxed{5} & 10 \\ 2 & \boxed{6} & 11 \\ 3 & \boxed{7} & 12 \\ 4 & \boxed{8} & 13 \end{matrix}} \quad = \quad \overset{\textbf{C}}{\begin{matrix} 30 & 70 & 120 \\ 70 & \boxed{174} & 304 \\ 110 & 278 & 488 \end{matrix}}$$

Si se desea obtener el elemento C[2,2] de la matriz C, se tienen que efectuar las siguientes operaciones:

C[2,2] =	A[2,1] * B[1,2]	=	5 * 5
	A[2,2] * B[2,2]	=	6 * 6
	A[2,3] * B[3,2]	=	7 * 7
	A[2,4] * B[4,2]	=	8 * 8
		Suma:	**174**

Ejercicios:

1. Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \; B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A.B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2x1+3x4 & 2x2+3x5 & 2x3+3x6 \\ 1x1+4x4 & 1x2+4x5 & 1x3+4x6 \\ 5x1+1x4 & 5x2+1x5 & 5x3+1x6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+12 & 4+15 & 6+18 \\ 1+16 & 2+20 & 3+24 \\ 5+4 & 10+5 & 15+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 19 & 24 \\ 17 & 22 & 27 \\ 9 & 15 & 21 \end{bmatrix}$$

2. Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \; B=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow A.B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2x(-1)+(-3)x3+(-5)x(-2) \\ (-1)x(-1)+4x3+5x(-2) \\ 1x(-1)+(-3)x3+(-4)x(-2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2-9+10 \\ 1+12-10 \\ -1-9+8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3. Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \; B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} C=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

a. Verifique que AB = BA = 0; AC = C y CA=A

b. Use los resultados de (a) para comprobar que

$ACB = CBA$
$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
$(A + B)^2 = (A - B)^2 = A^2 + B^2$

Aplicación de la Multiplicación entre Matrices

1. El comité de admisiones de cierta universidad anticipa la inscripción de 800 estudiantes de primer semestre para el próximo año para satisfacer las cuotas de ingreso se ha clasificado los futuros estudiantes según sexo y lugar de residencia. El número de estudiantes en cada categoría esta dado por la matriz

$$A = \begin{array}{l} \\ \text{Locales} \\ \text{Foráneos} \\ \text{Extranjeros} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Hombres} & \text{Mujeres} \end{array} \\ \left| \begin{array}{cc} 2700 & 3000 \\ 800 & 700 \\ 500 & 300 \end{array} \right| \end{array}$$

Al utilizar los datos acumulados de años anteriores el comité de admisiones considera que estos estudiantes optarán por asistir a las facultades de derecho, diseño, administración e ingeniería según los porcentajes que aparecen en la matriz

$$B = \begin{array}{l|cccc} & \text{Derecho} & \text{Diseño} & \text{Administración} & \text{Ingeniería} \\ \hline \text{Hombres} & 0.25 & 0.20 & 0.30 & 0.25 \\ \text{Mujeres} & 0.30 & 0.35 & 0.25 & 0.10 \end{array}$$

Encuentre la matriz AB que muestre el número de estudiantes locales, foráneos y extranjeros que se espera se inscriban en cada facultad

2. Las acciones de dos personas B y C están dadas por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \text{Acciones} \\ \begin{array}{cccc} \text{BAC} & \text{GM} & \text{IBM} & \text{TRW} \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 200 & 300 & 100 & 200 \\ 100 & 200 & 400 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Al cierre de las operaciones de cierto día, los precios de las acciones están dados por la matriz

$$D = \begin{array}{l} \text{BAC} \\ \text{GM} \\ \text{IBM} \\ \text{TRW} \end{array} \left| \begin{array}{c} 54 \\ 48 \\ 98 \\ 82 \end{array} \right|$$

a. Calcule *AD*
b. Explique el significado de las entradas de *AD*.

3. Un viajero está regresando de Londres después de un viaje por Europa y desea cambiar las diversas divisas por euros. Al contar su dinero encontró que tenía 80 chelines austriacos, 26 francos franceses, 18 guilders suecos y 20 marcos alemanes. Suponga que las tasas de cambio de moneda extranjera son €0.0727 por un chelín, €0.1524 por un franco, €0.4538 por un guilder y €0.5113 por un marco.

a. Escriba una matriz A de fila que represente los valore de las divisas
b. Escriba una matriz B de columna que represente las tasas de cambio
c. Si el viajero cambia todas las divisas que tiene, ¿cuántos euros recibirá?

4. Un cinema tiene cuatro salas de la I a la IV, el precio de cada función es de $2 mil pesos por niño, $3 mil pesos por estudiante y $4 mil pesos por adulto. La asistencia a la matiné del domingo está dada por la matriz

$$A=\begin{array}{l} \\ \text{Cinema I} \\ \text{Cinema II} \\ \text{Cinema III} \\ \text{Cinema IV} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Niño} & \text{Estudiante} & \text{Adulto} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 225 & 110 & 50 \\ 75 & 180 & 225 \\ 280 & 85 & 110 \\ 0 & 250 & 225 \end{vmatrix} \end{array}$$

Escriba una matriz de columna B que represente el precio de la entrada. Luego calcule A.B ¿Qué encuentra?

5. Suponga que el banco tiene tres fuentes principales de ingresos (préstamos empresariales, préstamos para automóviles e hipotecas de casas) y que retira fondos de esta fuente para capital de riesgo que se usa para crear fondos para nuevos negocios. Suponga que el ingreso de estas fuentes por cada 3 años se da la siguiente tabla y el banco utiliza 45% de su ingreso de los préstamos empresariales, 20% de su ingreso de los préstamos para automóviles y 30% de su ingreso de las hipotecas de casas para obtener sus fondos de capital de riesgo. Escriba un producto matricial que dé el capital de riesgo disponible en cada uno de los tres años

Año	*Empresariales*	*Para automóviles*	*Hipotecarios*
2001	63300	20024	51820
2002	48305	15817	63722
2003	55110	18621	64105

6. Dos departamentos de una empresa, Ay B necesitan diferentes cantidades de los mismos productos. La siguiente tabla da las cantidades de los productos que los departamentos necesitan

	Acero	Plástico	Madera
Departamento A	30	20	10
Departamento B	20	10	20

Dos proveedores, Ace y Kink surten estos tres productos, con los precios unitarios que se dan en la siguiente tabla

	Ace	Kink
Acero	3000	280
Plástico	150	100
Madera	150	200

a) Use la multiplicación de matrices para encontrar cuánto costarán estos pedidos con los proveedores.
b) ¿A qué proveedor debe comprar cada departamento?

TALLER DE ALGEBRA LINEAL

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular: **A + B; A - B; A x B; B x A; A^t**. (Traspuesta)

2. Demostrar que: **$A^2 - A - 2I = 0$**, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema:

$$\begin{cases} 2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A-3B=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

5. Resolver; en forma matricial, el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+5z=12 \\ x+4y+25z=36 \end{cases}$$